第15講　導関数の応用

PART1　関数の極大・極小

1　[1]　3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

[2]　(1)　関数 $f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ。

Point Pickup

[1]　関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる $\Longrightarrow$ $f'(\alpha)=0$

この逆は成り立たない。すなわち，$f'(\alpha)=0$ であっても $f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

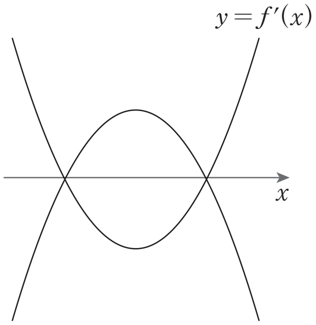
また，求めた値が極大，極小に関する条件を満たすかの確認が必要となる。

[2]　3次関数 $f(x)$ が極値をもつ

$\Longleftrightarrow$ 2次関数 $f'(x)$ が正から負，または負から正に変わる点が少なくとも1つ存在する。

$\Longleftrightarrow$ 2次関数 $f'(x)$ が正から負に変わる点が存在すれば必ず負から正に変わる点も存在する。逆もいえる。

$\Longleftrightarrow$ 2次方程式 $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ。



第15講　PART1　確認問題

1　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 2, $x=2$ で極大値 3 をとる。このとき，定数 a, b, c, d の値を求めよ。

$a=$ アイ, $b=$ ウ, $c=$ エオカ, $d=$ キ

2　関数 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+(a-3)x^2-(2a-3)x+1$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

ク

① $-3<a<1$　② $a<-3$, $1<a$

③ $1<a<2$　④ $a<1$, $2<a$

⑤ $-3<a<2$　⑥ $a<-3$, $2<a$

3 関数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ の極値を求めよ。

$a>$ ケ のとき　$x=$ コ で極大値 サ

$x=$ シ で極小値 ス

$a=$ ケ のとき　極値はない

$a<$ ケ のとき　$x=$ セ で極大値 ソ

$x=$ タ で極小値 チ

[コ , シ , セ , タ の選択肢]

① a　② $-a$　③ $3a$　④ $-3a$

⑤ $\dfrac{a}{3}$　⑥ $-\dfrac{a}{3}$　⑦ 0

[サ , ス , ソ , チ の選択肢]

① a^3　② $-15a^3$　③ $33a^3$

④ $-\dfrac{5}{27}a^3$　⑤ $\dfrac{11}{27}a^3$　⑥ 0

[MEMO]

第15講　導関数の応用

PART1　関数の極大・極小

1 ［1］ 3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

［2］ (1) 関数 $f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(2) 関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ。

［1］ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極小値 -2 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=-2$

$x=3$ で極大値 2 をとるから　$f'(3)=0$，$f(3)=2$

よって　$3a+2b+c=0$，$a+b+c+d=-2$，$27a+6b+c=0$，$27a+9b+3c+d=2$

これを解いて　$a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$

このとき

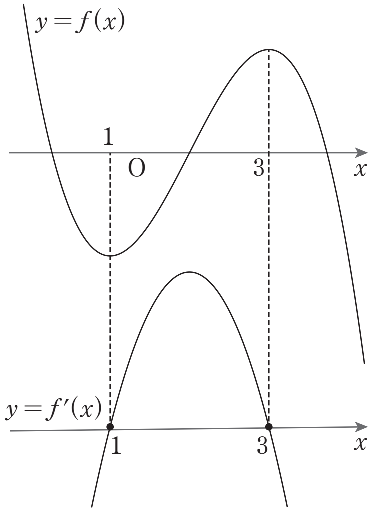
$$f(x)=-x^3+6x^2-9x+2,\ f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

よって，$f(x)$ の増減表は右図となり，確かに $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

したがって

$a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$



(別解)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ …… ①

$f(x)$ が $x=1$ で極小値，$x=3$ で極大値をとり，①より $f'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることから

$f'(x)=3a(x-1)(x-3)$

$=3ax^2-12ax+9a$ $(a<0)$ …… ②

と表せる。

①と②を係数比較して　$2b=-12a$，$c=9a$

よって　$b=-6a$

このとき　$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$　であるから，

$f(1)=-2$，$f(3)=2$ より　$4a+d=-2$，$d=2$

よって　$a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$（$a<0$ を満たす）

［2］ ⑴　$f'(x)=3x^2+2(a-2)x-3a$

$f(x)$ が極値をもつための条件は $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+9a>0 \qquad a^2+5a+4>0 \qquad (a+4)(a+1)>0$$

したがって　$a<-4$，$-1<a$

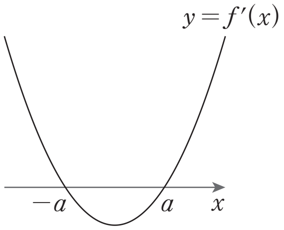
⑵　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ のとき　$x=-a$ で極大値 $2a^3$，$x=a$ で極小値 $-2a^3$ をとる。

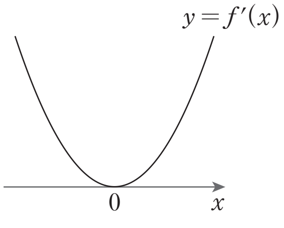
$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加。よって，極値はない。

$a<0$ のとき　$x=a$ で極大値 $-2a^3$，$x=-a$ で極小値 $2a^3$ をとる。

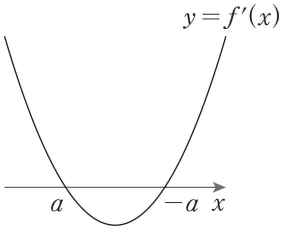
$a>0$ のとき



$a=0$ のとき



$a<0$ のとき



第 15 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：9，エオカ：-12，キ：7

[解説]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x=1$ で極小値 2 をとるから

$$f'(1)=0,\ f(1)=2$$ [A]

$x=2$ で極大値 3 をとるから

$$f'(2)=0,\ f(2)=3$$

よって

$$3a+2b+c=0,$$
$$a+b+c+d=2,$$
$$12a+4b+c=0,$$
$$8a+4b+2c+d=3$$

これを解いて　$a=-2$，$b=9$，$c=-12$，$d=7$

このとき

$$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+7$$ [B]

$$f'(x)=-6x^2+18x-12$$
$$=-6(x-1)(x-2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 2	↗	極大 3	↘

したがって，$f(x)$ は，確かに $x=1$ で極小値 2，$x=2$ で極大値 3 をとる。

よって　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=9}$，$\boldsymbol{c=-12}$，$\boldsymbol{d=7}$

[A]　関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる $\Longrightarrow f'(\alpha)=0$
この逆は成り立たないことに注意。
すなわち，$f'(\alpha)=0$ であっても $f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

[B]　求めた a，b，c，d の値について，題意の通りに $f(x)$ が極値をとることを確かめる。

（別解）

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \cdots\cdots①$$

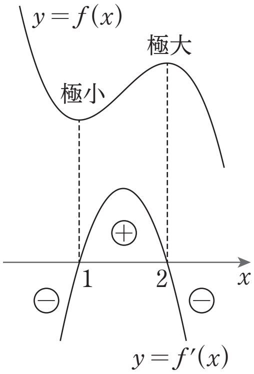
$f(x)$ が，$x=1$ で極小値，$x=2$ で極大値をとり，

①より，$f'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることから

$$f'(x)=3a(x-1)(x-2)$$

$$=3ax^2-9ax+6a \quad (a<0) \cdots\cdots②$$

と表せる。



①と②を係数比較して　$2b=-9a$，$c=6a$

すなわち　$b=-\dfrac{9}{2}a$，$c=6a$

このとき, $f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+6ax+d$ であるから,

$f(1)=2$，$f(2)=3$ より

$$\frac{5}{2}a+d=2,$$

$$2a+d=3$$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=9}$，$\boldsymbol{c=-12}$，$\boldsymbol{d=7}$

（$a<0$ を満たす）

2 [正解] ク：②

[解説]

$f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+(a-3)x^2-(2a-3)x+1$ より

$$f'(x)=4x^2+2(a-3)x-(2a-3)$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。 [C]

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

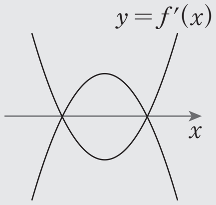
$$\frac{D}{4}=(a-3)^2+4(2a-3)>0$$

よって　$a^2+2a-3>0$

$$(a+3)(a-1)>0$$

したがって　$\boldsymbol{a<-3,\ 1<a}$

[C]　3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ
$\Longleftrightarrow$ 2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負，または負から正に変わる点が少なくとも 1 つ存在する。
$\Longleftrightarrow$ 2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負に変わる点が存在すれば必ず負から正に変わる点も存在する。逆もいえる。
$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。



3 **[正解]** **ケ**：0，**コ**：②，**サ**：①，**シ**：⑤，**ス**：④，

セ：⑤，**ソ**：④，**タ**：②，**チ**：①

[解説]

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ より

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$$
$$=(x+a)(3x-a)$$

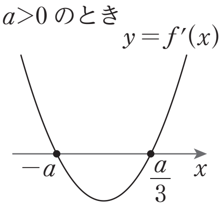
$f'(x)=0$ とすると　$x=-a,\ \dfrac{a}{3}$

$a>0$ のとき [D]

$x=-a$ で極大値 a^3,

$x=\dfrac{a}{3}$ で極小値 $-\dfrac{5}{27}a^3$

をとる。

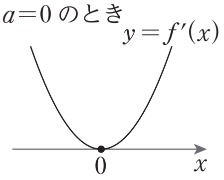


$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2\geqq 0$ より，

$f(x)$ は単調増加する。

よって　極値はない。

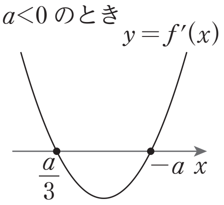


$a<0$ のとき

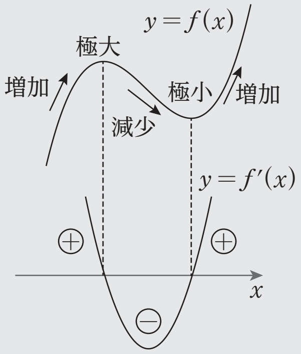
$x=\dfrac{a}{3}$ で極大値 $-\dfrac{5}{27}a^3$,

$x=-a$ で極小値 a^3

をとる。



[D]　3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が正のとき，2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負，または負から正に変わる点と，$f(x)$ が極値をとる点の対応は，次の図の通り。



$x=\alpha$ で $f'(x)$ の符号が

・正から負に変わる場合
　$x=\alpha$ で極大になる

・負から正に変わる場合
　$x=\alpha$ で極小になる